"Θεμελιώδεις Έννοιες" No. Date 11/01/19

$\{x : P(x)\}$.

Παράδοξο του Russel

Υπάρχει ένα σύνολο που να περιέχει όλα τα σύνολα
Έστω A το σύνολο όλων των συνόλων.
Ορίζουμε το σύνολο B ως εξής:

$$B = \{X : X \text{ σύνολο } X \notin X\}.$$

Για το σύνολο B υπάρχουν δύο περιπτώσεις.

$1^{\underline{η}}$ περ. $B \in B$
$2^{\underline{η}}$ περ. $B \notin B$

Στην $1^{\underline{η}}$ περίπτωση:
δηλ. αν $B \in B$ τότε από τον ορισμό του B προκύπτει $B \notin B$.
<u>άτοπο</u>

Στην $2^{\underline{η}}$ περίπτωση:
δηλ. αν $B \notin B$, τότε από τον ορισμό προκύπτει $B \in B$.
<u>άτοπο</u>

Ισοδύναμα ή ισοπληθικά σύνολα - Πληθικοί αριθμοί

Έστω
$$A=\left\{\begin{array}{cccc}\alpha, & \beta, & \gamma, & \delta \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4.\end{array}\right\}$$

"Μετρώντας" τα στοιχεία του A, αντιστοιχίσαμε το α στο 1
β στο 2
γ στο 3
δ στο 4

Δηλαδή φτιάξαμε μια συνάρτηση η οποία είναι 1-1 και επί από το σύνολο $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ στο σύνολο $\{1,2,3,4\}$

Ορισμός: Δύο σύνολα A και B λέγονται ισοπληθικά (ή ισοδύναμα, αν υπάρχει μια συνάρτηση από το ένα στο άλλο και είναι επί δηλ. $f: A\to B$ 1-1 και επί

ισοπληθικό

Όταν συμβαίνει αυτό, θα συμβολίζαμε $A \simeq B$

Πρόταση: Για οποιαδήποτε σύνολα A και Γ ισχύουν τα εξής:
α) $A\simeq A$
β) Αν $A\simeq B$ τότε $B\simeq A$
γ) Αν $A\simeq B$ και $B\simeq\Gamma$ τότε $A\simeq\Gamma$

Απόδειξη: α) Η ταυτοτική συνάρτηση
$I_A: A\to A$ (δηλ. $I_A(x)=x$, $\forall x\in A$) είναι 1-1 και επί

β) Αν $A\simeq B$ τότε υπάρχει $f: A\to B$ 1-1 και επί
Τότε η $f^{-1}: B\to A$ είναι 1-1 και επί
Άρα $B\simeq A$.

γ) Αν $A \simeq B$ και $B \simeq \Gamma$ τότε υπάρχει
$f: A \to B$ 1-1 και επί και $g: B \to \Gamma$ 1-1 και επί

Τότε $g \circ f : A \to \Gamma$ είναι 1-1 και επί. Άρα $A \simeq \Gamma$.

Προσοχή! Η παραπάνω πρόταση μας δείχνει ότι η $\simeq$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στην κλάση όλων των συνόλων

Δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω τη φράση σύνολο, καθώς δεν είναι ένα σύνολο όπως δείξαμε και από το παράδοξο του Russel.

Παραδείγματα

(α) Το σύνολο $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ των φυσικών αριθμών είναι ισοπληθικό με το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2\}$.

Πράγματι η συνάρτηση: $f: \mathbb{N} \to A$ με τύπο $f(n) = n+1$ είναι 1-1 και επί.

(β) Αν συμβολίσουμε με $\mathbb{N}_a$ το σύνολο των άρτιων φυσικών και με $\mathbb{N}_\pi$ το σύνολο των περιττών φυσικών.
Τότε $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}_a$
Εφόσον η συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_a$ με $f(n) = 2n$ είναι 1-1 κ' επί

Επίσης: $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}_\pi$ αφού η συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\pi$ με
$f(n) = 2n-1$ είναι 1-1 και επί

Μπορούμε να δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη για τη $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}_\pi$

Η $g: \mathbb{N}_a \to \mathbb{N}_\pi$ με $g(n) = n-1$ είναι 1-1 και επί

Συνεπώς $\underset{\text{άρτιοι}}{\mathbb{N}_a} \simeq \underset{\text{περιττοί}}{\mathbb{N}_\pi}$

No. Date

Επίσης είδαμε πριν ότι $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}_a$. Επομένως, αφού η $\simeq$ είναι μεταβατική θα ισχύει $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}_0$

γ) Το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ είναι ισοπληθικό με

το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

τα αντιστοιχίζω

$\downarrow$ 6 4 2 1 3 5 7

φτιάχνω 1-1 και επί αντιστοίχιση των ακεραίων με τους φυσικούς

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$

Καταρχήν η f είναι καλά ορισμένη.

→ Αν $x \in \mathbb{Z}$ με $x \geq 0$

Τότε $2x \geq 0$ άρα $2x+1 \geq 1$ και εφόσον $2x+1 \in \mathbb{Z}$ προκύπτει $2x+1 \in \mathbb{N}$

→ Αν $x \in \mathbb{Z}$ με $x < 0$, τότε $-x \in \mathbb{N}$

άρα $2(-x) \in \mathbb{N}$, δηλ. $-2x \in \mathbb{N}$.

<u>Η f είναι 1-1</u>

Έστω $x, y \in \mathbb{Z}$ με $f(x) = f(y)$

→ Αν $x \geq 0$, $y \geq 0$

$f(x) = f(y) \Rightarrow 2x+1 = 2y+1 \Rightarrow x = y$.

No. Date

→ Αν $x<0$, $y<0$
$f(x)=f(y) \Rightarrow -2x=-2y \Rightarrow x=y$

→ Αν $x\geq 0$, $y<0$ τότε ο $f(x)$ είναι περιττός και ο $f(y)$ είναι άρτιος άρα δεν μπορεί να ισχύει $f(x)=f(y)$

→ Ομοίως και $x<0$, $y\geq 0$.

<u>Η f είναι επί</u>

Τα κάτω δεν τα σύγκρινα με τη διάταξη εξίσωση απο πριν

Έστω $x\in\mathbb{N}$
→ Αν x άρτιος, τότε $x=2k$ με $k\in\mathbb{N}$.
Τότε $-k\in\mathbb{Z}$ με $-k<0$
$f(-k)=(-2)(-k)=2k=x$

→ Αν x περιττός. Τότε $x-1$ είναι άρτιος με $x-1\geq 0$.
άρα $x-1=2k$ για κάποιο $k\in\mathbb{Z}$ με $k\geq 0$.
$f(k)=2k+1=x$.

δ) Για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$, το ανοικτό διάστημα $(0,1)$ είναι ισοπληθικό με το ανοικτό διάστημα (α,β)
Πράγματι η $f:(0,1)\to(\alpha,\beta)$ με τύπο $f(x)=\alpha+x(\beta-\alpha)$ είναι καλά ορισμένη, 1-1 και επί. Άρα $(0,1)\simeq(\alpha,\beta)$

Αν $\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ με $\gamma<\delta$, τότε $(0,1)\simeq(\gamma,\delta)$.

Επειδή η $\simeq$ είναι συμμετρική και μεταβατική προκύπτει $(\alpha,\beta)\simeq(\gamma,\delta)$

No. Date

ε) Ομοίως προκύπτει ότι $[0,1] \simeq [\alpha,\beta]$, για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$.
Επίσης ομοίως $[0,1) \simeq [\alpha,\beta)$ και $(0,1] \simeq (\alpha,\beta]$.

Έτσι όπως πριν, $[\alpha,\beta] \simeq [\gamma,\delta]$
$[\alpha,\beta) \simeq [\gamma,\delta)$.

στ) $\mathbb{R} \simeq (-1,1)$

<u>1ος τρόπος</u> : $f:\mathbb{R} \to (-1,1)$ με $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

<u>Η f είναι καλά ορισμένη</u> (δηλ. $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \in (-1,1)$)

Δηλ. $\dfrac{x}{1+|x|} \in (-1,1)$

Δηλ. $\left| \dfrac{x}{1+|x|} \right| < 1$.

<u>Πράγματι</u> : $\left| \dfrac{x}{1+|x|} \right| = \dfrac{|x|}{1+|x|} < 1$ άρα $\dfrac{x}{1+|x|} \in (-1,1)$

Αφού:

$$\frac{|x|}{1+|x|} = \frac{1+|x|-1}{1+|x|} = \frac{1+|x|}{1+|x|} - \frac{1}{1+|x|} = 1 - \frac{1}{1+|x|} < 1$$

Η f είναι 1-1

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $f(x) = f(y)$

Τότε $\dfrac{x}{1+|x|} = \dfrac{y}{1+|y|}$ (*)

(*) $\Rightarrow \left| \dfrac{x}{1+|x|} \right| = \left| \dfrac{y}{1+|y|} \right|$

$\Rightarrow \dfrac{|x|}{1+|x|} = \dfrac{|y|}{1+|y|}$

$\Rightarrow |x| + \cancel{|x| \cdot |y|} = |y| + \cancel{|x| \cdot |y|}$

$\Rightarrow |x| = |y|$

Από την (*) προκύπτει $\dfrac{x}{1+|x|} = \dfrac{y}{1+|x|} \Rightarrow x = y$

Άρα η f είναι 1-1.

Η f είναι επί

Έστω $y \in (-1,1)$. Αναζητούμε $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = y$

$\Updownarrow$

$\dfrac{x}{1+|x|} = y$

→ Αν $y = 0$ θέτουμε $x = 0$

→ Αν $y > 0$ από την (1) πρέπει $x > 0$

$\dfrac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = y + xy \Leftrightarrow x(1-y) = y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{y}{1-y}$

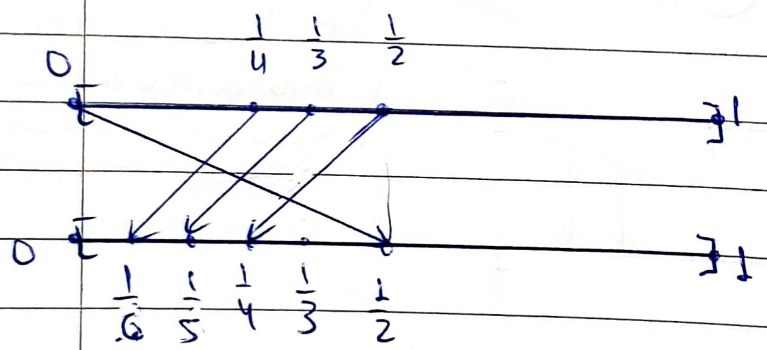
η) $[0,1] \simeq (0,1)$

Έστω $B = (0,1) \setminus \left\{ \frac{1}{n} \; n \in \mathbb{N} \right\}$

<u>Ορίζουμε:</u>

$g : [0,1] \to (0,1)$

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in B \\ 1/2, & x = 0 \\ \frac{1}{n+2} & x = \frac{1}{n} \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$



Η g είναι 1-1 και επί.